

基于情绪指标 VIX 的择时策略

——指增中性专题报告（一）

报告要点

本文根据情绪指标构建了择时策略，并对股指期货组合进行了相应的择时尝试。其中，“500ETF+IC 组合”搭配“差分调整择时策略”年化收益的提升约为 44%，夏普提升约 2.22；“1000ETF+IM 组合”搭配“均值择时策略”年化收益的提升约为 60%，夏普提升约 3.38。

摘要：

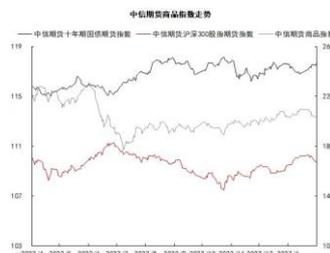
投资组合的对数收益率偏离正态分布时有发生，近年来市场较频繁地见证收益率尖峰厚尾分布的出现。本报告在“金融衍生品”的大框架下，尝试回顾整理并代码实现了基于期权数据的情绪指标 VIX 以及广义上的情绪指标 GVIX，同时将该指标运用到股指期货上进行了相应的择时策略的尝试。我们具体考察 3 个例子，分别是组合 1——“500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”、组合 2——“中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”和组合 3——“沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货”；搭配 2 种择时方式：均线与差分调整，相应的择时策略逻辑则在持有单类别 etf 基金的基础上对于相应股指期货基于情绪指标 VIX 给出的信号进行多空择时，以此来探究中性策略的超额收益。策略效果举例如下：

- **组合 1（500etf 基金+中证 500 股指期货）+ VIX 的差分调整择时：**
 - 多空信号：年化收益率提升约 44%，夏普率提升约 2.22；
- **组合 2（1000etf 基金+中证 1000 股指期货）+ VIX 的均线择时：**
 - 多空信号：年化收益率提升约 60%，夏普率提升约 3.38；

其中，“VIX”受限于数据可得性，回测时间均较短。

风险提示：本报告中所涉及的资产配置和模型应用仅为回溯举例，并不构成推荐建议。

投资咨询业务资格：
证监许可【2012】669 号



金融工程研究团队

研究员：
周通
010-80401733
从业资格号 F3078183
投资咨询号 Z0018055

期货多因子系列研究报告

专题报告五：不同频率视角下的选
期因子——20221222
专题报告六：基于深度学习的期货
组合优化——20221229

组合优化系列研究报告

专题报告一：截面回归与因子正交
的二重奏——20230131

目 录

摘要:	1
一、尖峰厚尾风险与防范	3
二、情绪指标 VIX 指数	4
三、择时方法	5
(一) 差分调整择时	5
1. 策略设计	5
2. 回测参数	5
3. 差分调整择时回测表现	6
(3.1) 组合 1: “500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”	6
(3.2) 组合 2: “中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”	6
(3.3) 组合 3: “沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货 if”	7
(二) 均线择时	8
1. 策略设计	8
2. 回测参数	8
3. 均线择时回测表现	9
(3.1) 组合 1: “500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”	9
(3.2) 组合 2: “中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”	9
(3.3) 组合 3: “沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货 if”	10
四、总结	11
五、附录: 情绪指标的数学推导	12
(一) VIX 的具体推导	12
(二) GVIX 的具体推导以及与 VIX 的联系	15

图表目录

图表 1: 对数收益率的尖峰厚尾	3
图表 2: VIX 指标差分调整择时 (多 500ETF+多空 IC, 5-15 日移动平均+调整系数 0.08)	6
图表 3: VIX 指标差分调整择时 (多 1000ETF+多空 IM, 5-15 日移动平均+调整系数 0.08)	7
图表 4: VIX 指标差分调整择时 (多 300ETF+多空 IF, 5-15 日移动平均+调整系数 0.08)	8
图表 5: VIX 指标均线择时 (多 500ETF+多空 IC, 短均线 5 日+长均线 15 日)	9
图表 6: VIX 指标均线择时 (多 1000ETF+多空 IM, 短均线 5 日+长均线 15 日)	10
图表 7: VIX 指标均线择时 (多 300ETF+多空 IF, 短均线 5 日+长均线 15 日)	11

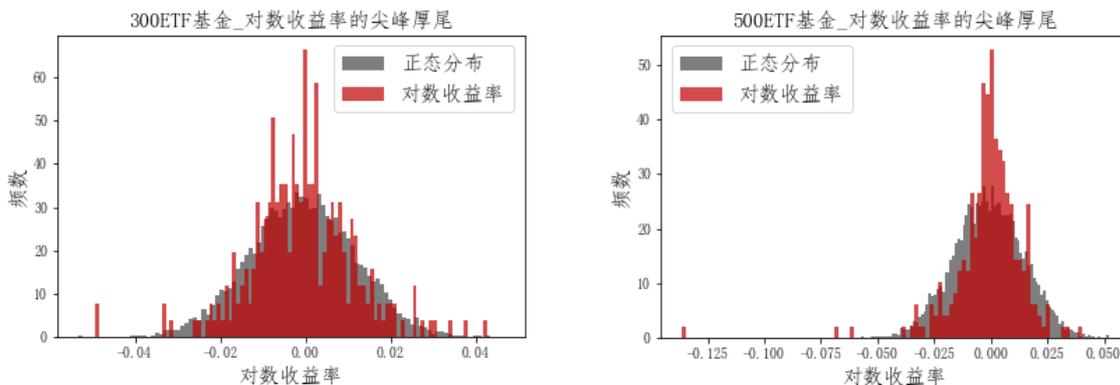
这是我们“指增中性”专题系列的第一篇，后续我们将从量化视角针对指数增强/中性策略的标的分析、因子构建、择时对冲等相关问题提供解决方案。

一、尖峰厚尾风险与防范

金融研究中，较常见的假设包含“单一资产或投资组合的对数收益率服从正态分布”这一点。但现实中与该假设不符的情况时有发生，即相应的收益率分布偏离正态分布，市场较频繁地见证极端收益率的出现。特别是金融市场近来频发的风险事件使得资产价格出现大幅下跌的频率比正态分布所预期的明显更高。

投资组合出现极端收益率的风险则被定义为尖峰厚尾风险，而市场中的资产收益率通常被认为是尖峰厚尾分布。分布的中心越尖、尾部越厚，出现极端收益率的概率越大。发生尖峰厚尾风险时，存在的危害有以下几点：1. 较大亏损出现的情况将迫使投资者短期大量赎回资金，从而导致组合管理者被迫出售资产、加大市场的压力、影响后续反弹的参与程度；2. 较大回撤出现的隐忧，这将影响资产的长期收益；3. 资产的波动率等风险指标抬升。因此，投资组合管理中不可避免的一个重要问题就是预期外的尖峰厚尾风险的识别与化解。

图表1：对数收益率的尖峰厚尾



资料来源：同花顺 iFind、中信期货研究所

常见的方法有 3 大类：第 1 大类是股票策略，将波动因素加入股票选择的考量之中，尽可能使组合保持在较低的波动水平，这种方法是通过降低组合的波动来减少尖峰厚尾风险，但在股市发生危机时仍有可能面临较大回撤；第 2 大类是通过资产配置方式，配置多个相关性较低的资产或降低风险资产的权重来防范单一资产突发风险对整个组合的影响；第 3 大类是以期权等衍生品作为对冲的工具，通过持续“保险”来精准对冲尖峰厚尾风险。

本报告从第 3 个角度出发，在金融衍生品方法的大框架下尝试回顾整理并代码实现了基于期权数据的情绪指标 VIX，同时将该指标运用到股指期货上进行了

相应的择时策略的尝试。我们具体考察 3 个例子，分别是组合 1——“500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”、组合 2——“中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”和组合 3——“沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货”，相应的择时策略逻辑则在持有单类别 etf 基金的基础上对于相应股指期货基于情绪指标 VIX 给出的信号进行多空择时，以此来探究中性策略的超额收益。

二、情绪指标 VIX 指数

芝加哥商品交易所 CBOE 于 1993 年推出 VIX 指数，主要参考文献是《CBOE VIX white paper》，感兴趣的读者可以参考如下链接：<https://github.com/Ray-gith/IV-VIX-GVIX/blob/main/VIXwhite.pdf>。

它的具体定义是：CBOE 波动性指数，即 VIX，是一个实时市场指数，代表市场对未来 30 天波动性的预期。投资者在做投资决定时，使用 VIX 指数来衡量市场的风险、恐惧或压力水平。

VIX 指标的具体表达式如下：

$$\widehat{VIX} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{N(T_2) - N(30)}{N(T_2) - N(T_1)} \right] (T_1 \cdot \hat{\sigma}_1^2) + \left[\frac{N(30) - N(T_1)}{N(T_2) - N(T_1)} \right] (T_2 \cdot \hat{\sigma}_2^2) \right\} \left(\frac{N(365)}{N(30)} \right)},$$

其中：

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i) - \frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2,$$

关于上面涉及到的符号，我们进行如下相关说明：

- (1) $\hat{\sigma}$ ：近月波动率估计；
- (2) T ：期权合约剩余到期时间；
- (3) r ：时长为 T 的无风险利率；
- (4) F ：无套利的远期价格，具体计算遵循以下步骤：
 - (4.1) 获取时长为 T 的无风险利率 r ；
 - (4.2) 获取看涨期权价格与看跌期权价格相差最小的执行价，记作 S ；（注意其并非标的资产价格）
 - (4.3) 计算无套利远期价格， $F = S + e^{rT}(C(S) - P(S))$ ，其中 $C(S)$ 是执行

价为 S 的认购期权价格；

(5) K_0 : 小于 F 但最靠近 F 的执行价；

(6) K_i : 从小到大所有近月合约的执行价, 其中 $i = 1, 2, 3, \dots$;

(7) $\Delta K_i \triangleq \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$: 第 i 个执行价所对应的执行价间隔；

(8) $Q(K_i)$: 执行价为 K_i 的取值期权的价格 (注意, 其有可能为看涨期权或看跌期权, 这里需要保证它为虚期权)；

(9) $N(\cdot)$: 代表时间间隔数, T_1 、 T_2 分别代表近月 (下一个月)、次近月 (下下个月)。

我们在本篇研报最后的附录部分提供了 VIX 指标和广义情绪指标 GVIX 详细的数学推导以及二者之间的联系, 供感兴趣的读者查阅。

三、择时方法

这一节我们讨论择时中关键的一环——择时方法的设计。

(一) 差分调整择时

1. 策略设计

我们使用到 VIX 的 5 日移动平均和 15 日移动平均; 在此基础上搭配调整 (伸缩) 系数 SD 取值为 0.08。多空信号层面: 如果长线与短线的差值小于调整后短线值的相反数, 则做多; 如果长线与短线的差值大于调整后短线值本身, 则做空。

2. 回测参数

- 交易价格: etf 基金使用其收盘价, 而相应组合中的股指期货使用其复权收盘价;
- 交易标的: 组合 1 (500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货)、组合 2 (中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货) 和组合 3 (沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货);
- 杠杆倍数: 1 倍杠杆;
- 回测区间: 组合 1——2022/10/27-2023/2/24、组合 2——2022/10/27-2023/2/24 和组合 3——2022/6/20-2023/2/24。

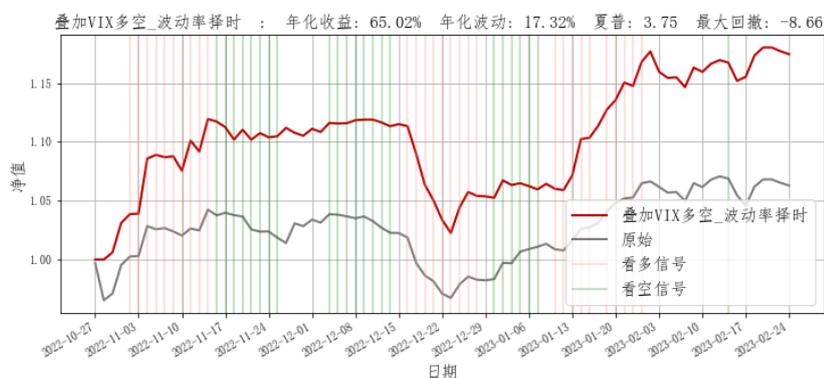
3. 差分调整择时回测表现

这里通过净值图的形式来观察 VIX 指标的回测效果。

(3.1) 组合 1：“500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”

下面是关于“500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”这个组合的“多空”的回测结果。具体而言，我们这里使用 500etf 期权来生成 VIX 指标，然后将该指标产生的多空信号作用于中证 500 股指期货，再叠加 500etf 基金自身的净值表现，来绘制这里的净值图。需要注意的一点是这里择时策略由于回测区间较短可能存在净值高估，其具体原因在于 500etf 期权上市时间较短。

图2：VIX 指标差分调整择时（多 500ETF+多空 IC，5-15 日移动平均+调整系数 0.08）



资料来源：同花顺 iFind、中信期货研究所

从上图及下表可以发现，VIX 择时的效果比较显著，在短样本内有限对冲了最大回撤的几个交易日。其中，多空信号方面：夏普率提升了约 2.22，年化收益率上升了约 44%。

针对组合 1 的差分调整择时优化结果：

表格 1：VIX 差分调整择时回测效果（择时 VS 基准）

策略	年化收益%	年化波动%	最大回撤%	夏普比率	Calmar 比率
500ETF+多空 IC	65.02	17.32	8.66	3.75	7.51
500ETF	20.92	13.66	7.21	1.53	2.9

资料来源：同花顺 iFind、中信期货研究所

(3.2) 组合 2：“中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”

下面是关于“中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”这个组合的“多空”的回测结果。具体而言，我们这里使用中证 1000 指数期权来生成 VIX 指标，然后将该指标产生的多空信号作用于中证 1000 股指期货，再叠加 1000etf 基金自身的净值表现，来绘制这里的净值图。

1000etf 基金自身的净值表现，来绘制这里的净值图。需要注意的一点是这里发择时策略由于回测区间较短可能存在净值高估，其具体原因在于中证 1000 指数期权上市时间较短。

图表3: VIX 指标差分调整择时 (多 1000ETF+多空 IM, 5-15 日移动平均+调整系数 0.08)



资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

同样的，从上图及下表可以发现，VIX 择时的效果比较显著，在短样本内有限对冲了最大回撤的几个交易日。其中，多空信号方面：夏普率提升 3.08，年化收益率提升约 44%。

针对组合 2 的差分调整择时优化结果：

表格 2: VIX 差分调整择时回测效果 (择时 VS 基准)

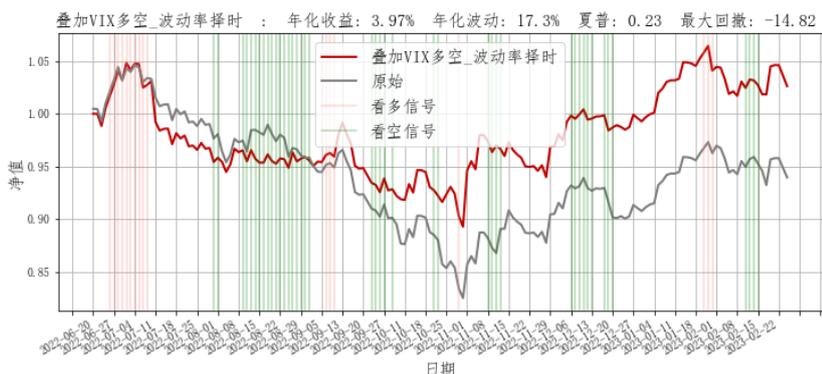
策略	年化收益%	年化波动%	最大回撤%	夏普比率	Calmar 比率
1000ETF+多空 IM	65.91	14.92	4.51	4.42	14.61
1000ETF	22.05	16.4	8.75	1.34	2.52

资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

(3.3) 组合 3: “沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货 if”

下面是关于“沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货”这个组合的“多空”的回测结果。具体而言，我们这里使用沪深 300 指数期权来生成 VIX 指标，然后将该指标产生的多空信号作用于沪深 300 股指期货，再叠加 300etf 基金自身的净值表现，来绘制这里的净值图。需要注意的一点是这里发择时策略由于回测区间较短可能存在净值高估，其具体原因在于沪深 300 指数期权上市时间较短。

图表4: VIX 指标差分调整择时 (多 300ETF+多空 IF, 5-15 日移动平均+调整系数 0.08)



资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

同样的, 从上图及下表可以发现, VIX 择时的效果比较显著, 在短样本内有限对冲了最大回撤的几个交易日。其中, 多空信号方面: 夏普率提升约 0.76, 年化收益率上升了约 13%。

针对组合 3 的差分调整择时优化结果:

表格 3: VIX 差分调整择时回测效果 (择时 VS 基准)

策略	年化收益%	年化波动%	最大回撤%	夏普比率	Calmar 比率
300ETF+多空 IF	3.97	17.3	14.82	0.23	0.27
300ETF	-8.92	16.74	21.15	-0.53	-0.42

资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

(二) 均线择时

1. 策略设计

我们使用到了 VIX 的 5 日短均线和 15 日长均线。多空信号层面: 短线上穿长线, 看多; 短线下穿长线, 看空。经回测后我们发现, 该优化的择时方法对于组合 2 和组合 3 的回测表现均有明显提升。

2. 回测参数

- 交易价格: etf 基金使用其收盘价, 而相应组合中的股指期货使用其复权收盘价;
- 交易标的: 组合 1 (500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货)、组合 2 (中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货) 和组合 3 (沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货);
- 杠杆倍数: 1 倍杠杆;
- 回测区间: 组合 1 —— 2022/10/27-2023/2/24、组合 2 ——

2022/10/27-2023/2/24 和组合 3——2022/6/20-2023/2/24。

3. 均线择时回测表现

这里通过净值图的形式来观察 VIX 指标的回测效果。

(3.1) 组合 1：“500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”

下面是关于“500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”这个组合的“多空”的回测结果。具体而言，我们这里使用 500etf 期权来生成 VIX 指标，然后将该指标产生的多空信号作用于中证 500 股指期货，再叠加 500etf 基金自身的净值表现，来绘制这里的净值图。需要注意的一点是这里择时策略由于回测区间较短可能存在净值高估，其具体原因在于 500etf 期权上市时间较短。

图表5：VIX 指标均线择时（多 500ETF+多空 IC，短均线 5 日+长均线 15 日）



资料来源：同花顺 iFind、中信期货研究所

从上图及下表可以发现，VIX 择时的效果比较显著，在短样本内有限对冲了最大回撤的几个交易日。其中，多空信号方面：夏普率提升了约 2.49，最大回撤提升 2.50%，年化收益率上升了约 59%。

针对组合 1 的均线择时优化结果：

表格 4：VIX 均线择时回测效果（择时 VS 基准）

策略	年化收益%	年化波动%	最大回撤%	夏普比率	Calmar 比率
500ETF+多空 IC	80.04	19.9	9.71	4.02	8.25
500ETF	20.92	13.66	7.21	1.53	2.9

资料来源：同花顺 iFind、中信期货研究所

(3.2) 组合 2：“中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”

下面是关于“中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”这个组合的“多空”的回测结果。具体而言，我们这里使用中证 1000 指数期权来生成

VIX 指标，然后将该指标产生的多空信号作用于中证 1000 股指期货，再叠加上 1000etf 基金自身的净值表现，来绘制这里的净值图。**需要注意的一点是这里发择时策略由于回测区间较短可能存在净值高估，其具体原因在于中证 1000 指数期权上市时间较短。**

图表6: VIX 指标均线择时 (多 1000ETF+多空 IM, 短均线 5 日+长均线 15 日)



资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

同样的，从上图及下表可以发现，VIX 择时的效果比较显著，在短样本内有限对冲了最大回撤的几个交易日。其中，多空信号方面：夏普率提升约 3.38，最大回撤走弱约 5.49，年化收益率提升约 60%。

针对组合 2 的均线择时优化结果：

表格 5: VIX 均线择时回测效果 (择时 VS 基准)

策略	年化收益%	年化波动%	最大回撤%	夏普比率	Calmar 比率
1000ETF+多空 IM	81.73	17.32	3.26	4.72	25.09
1000ETF	22.05	16.4	8.75	1.34	2.52

资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

(3.3) 组合 3: “沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货 if”

下面是关于“沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货”这个组合的“多空”的回测结果。具体而言，我们这里使用沪深 300 指数期权来生成 VIX 指标，然后将该指标产生的多空信号作用于沪深 300 股指期货，再叠加上 300etf 基金自身的净值表现，来绘制这里的净值图。**需要注意的一点是这里发择时策略由于回测区间较短可能存在净值高估，其具体原因在于沪深 300 指数期权上市时间较短。**

图表7: VIX 指标均线择时 (多 300ETF+多空 IF, 短均线 5 日+长均线 15 日)



资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

同样的, 从上图及下表可以发现, VIX 择时的效果比较显著, 在短样本内有限对冲了最大回撤的几个交易日。其中, 多空信号方面: 夏普率提升了约 2.34, 年化收益率上升了约 50%。

针对组合 3 的均线择时优化结果:

表格 6: VIX 均线择时回测效果 (择时 VS 基准)

策略	年化收益%	年化波动%	最大回撤%	夏普比率	Calmar 比率
300ETF+多空 IF	41.24	22.8	10.45	1.81	3.95
300ETF	-8.92	16.74	21.15	-0.53	-0.42

资料来源: 同花顺 iFind、中信期货研究所

四、总结

本文尝试回顾整理并代码实现了基于期权数据的情绪指标 VIX 以及广义上的情绪指标 GVIX, 同时将该指标运用到股指期货上进行了相应的择时尝试。我们具体考察 3 个例子, 分别是组合 1——“500etf 期权+500etf 基金+中证 500 股指期货”、组合 2——“中证 1000 指数期权+1000etf 基金+中证 1000 股指期货”和组合 3——“沪深 300 指数期权+300etf 基金+沪深 300 股指期货”, 搭配 2 种择时方式: 差分调整择时和均线择时, 相应的择时策略逻辑则在持有单类别 etf 基金的基础上对于相应股指期货基于情绪指标 VIX 给出的信号进行多空择时, 以此来探究中性策略的超额收益。策略效果如下:

- 组合 1 (500etf 基金+中证 500 股指期货) + VIX 的差分调整择时:
 - 多空信号: 年化收益率提升约 44%, 夏普率提升约 2.22;
- 组合 2 (1000etf 基金+中证 1000 股指期货) + VIX 的差分调整择时:
 - 多空信号: 年化收益率提升约 44%, 夏普率提升约 3.08;

- 组合 3 (300etf 基金+沪深 300 股指期货) + VIX 的差分调整择时:
 - 多空信号: 年化收益率提升约 13%, 夏普率提升约 0.76;
- 组合 1 (500etf 基金+中证 500 股指期货) + VIX 的均线择时:
 - 多空信号: 年化收益率提升约 59%, 夏普率提升约 2.49;
- 组合 2 (1000etf 基金+中证 1000 股指期货) + VIX 的均线择时:
 - 多空信号: 年化收益率提升约 60%, 夏普率提升约 3.38;
- 组合 3 (300etf 基金+沪深 300 股指期货) + VIX 的均线择时:
 - 多空信号: 年化收益率提升约 50%, 夏普率提升约 2.34;

使用恐慌情绪指标 VIX 对不同类型宽基指数择时时, 适当的择时方法设计以及相应的参数选择对于组合的净值提升较为重要。

五、附录：情绪指标的数学推导

这里我们提供上面提到的情绪指标 VIX 的数学推导; 此外我们也给出了广义情绪指标 GVIX 的推导过程, 并阐明了两者的关系。

(一) VIX 的具体推导

从投教的角度出发, 我们将在本节提供上述 VIX 显式表达式的具体推导过程, 这里我们参考了文章《Does VIX Truly Measure Return Volatility?》(K. CHOW, W. JIANG and J. LI, 2018), 并对其符号使用进行了规范。

我们的出发点是初始值 S_0 的几何布朗运动

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma_t dW_t, t > 0, \quad (1)$$

其中, W_t 是布朗运动、漂移项系数 μ 为常数、滤流项系数 σ_t 仅与时间 t 相关, 我们也将后者称作波动率。然后, 我们对函数 $\ln S_t$ 使用伊藤引理:

$$\begin{aligned} d(\ln S_t) &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{S_t^2} d\langle S, S \rangle_t = \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{S_t^2} (S_t \sigma_t)^2 d\langle W, W \rangle_t \\ &= \left(\mu - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dW_t; \end{aligned} \quad (2)$$

接着, 我们用“式(2) - 式(1)”消掉滤流项, 可以得到

$$\sigma_t^2 dt = 2 \left\{ \frac{dS_t}{S_t} - d(\ln S_t) \right\}.$$

回顾上述定义之初约定波动率 σ_t 仅仅与时间 t 相关, 因此我们对上式两边关于 t 在区间 $[0, T]$ 上积分可得:

$$\begin{aligned} VIX &\triangleq \sqrt{E(\sigma^2)} = \sqrt{E\left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T \sigma_t^2 dt\right)} \\ &= \sqrt{\frac{2}{T} E\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t} - d(\ln S_t)\right)} = \sqrt{\frac{2}{T} \left[E\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}\right) - E\left(\ln \frac{S_T}{S_0}\right) \right]}. \end{aligned} \quad (3)$$

另一方面, 我们给出两个新的定义: 第一个是持有期收益 $R_t \triangleq \frac{S_t - S_0}{S_0}$, 第二个是对数收益 $r_t \triangleq \ln \frac{S_t}{S_0}$; 为了与虚值期权联系起来, 我们对第二个定义进行如下改写:

$$\ln S_t - \ln S_0 - \frac{S_t - S_0}{S_0} = - \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{(S_t - K)^+}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{(K - S_t)^+}{K^2} dK \right) \quad (4)$$

(4)事实上, 上式右边两项经过下述转换之后可以让上式变得更为直观,

$$\begin{aligned} & - \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{(S_t - K)^+}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{(K - S_t)^+}{K^2} dK \right) \\ &= - \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{K^2} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_t - K > x\}} dx dK + \int_0^{S_0} \frac{1}{K^2} \int_0^{\infty} \mathbf{1}_{\{K - S_t > y\}} dy dK \right) \\ &= - \left(\int_0^{\infty} dx \int_{S_0}^{S_t - x} \frac{1}{K^2} dK + \int_0^{\infty} dy \int_{S_t + y}^{S_0} \frac{1}{K^2} dK \right) \\ &= \int_0^{S_t - S_0} \left(\frac{1}{S_t - x} - \frac{1}{S_0} \right) dx + \int_0^{S_0 - S_t} \left(\frac{1}{S_0} - \frac{1}{S_t + y} \right) dy \\ &= \int_{0 \wedge (S_t - S_0)}^{0 \vee (S_t - S_0)} \left(\frac{1}{S_t - x} - \frac{1}{S_0} \right) dx, \end{aligned}$$

注意我们这里并不需要对数函数的 Taylor 展开。

再将前面定义的持有期收益 R_t 与对数收益 r_t 作差, 则我们可以得到

$$R_t - r_t = \int_{S_0}^{\infty} \frac{(S_t - K)^+}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{(K - S_t)^+}{K^2} dK, \quad (5)$$

上式取期望则有:

$$\begin{aligned} E(R_t) - E(r_t) &= E\left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{(S_t - K)^+}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{(K - S_t)^+}{K^2} dK\right) \\ &= e^{rt} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_t(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_t(K)}{K^2} dK \right), \end{aligned} \quad (6)$$

其中，执行价为 K 的看涨期权 $C_t(K) \triangleq e^{-rt}(S_t - K)^+$ ，执行价为 K 的看跌期权 $P_t(K) \triangleq e^{-rt}(K - S_t)^+$ ；上式移项之后则为 $E(R_t)$ 则为预期对数收益率。

在无套利条件下，根据几何布朗运动 S 的定义式和持有期收益 R 的定义，我们可以有

$$E\left(\int_0^t \frac{dS_s}{S_s}\right) = rt, \quad E(R_t) = e^{rt} - 1. \quad (7)$$

将上述 VIX 的定义式 (3)、预期对数收益率的定义以及上式 (6) 联立，

$$\begin{aligned} VIX &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[E\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}\right) - E\left(\ln \frac{S_T}{S_0}\right) \right]} = \sqrt{\frac{2}{T} \left[E\left(\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}\right) - E(rT) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[rT - E(R_T) + e^{rT} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[rT - (e^{rT} - 1) + e^{rT} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]} \\ &\approx \sqrt{\frac{2}{T} \left[-\frac{1}{2}(rT)^2 + e^{rT} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]}. \end{aligned} \quad (8)$$

关于上述最后一个约等于，我们这里进行具体说明：首先我们联立以下两式

$$\begin{cases} E\left(-\ln S_t + \ln S_0 + \frac{S_t - S_0}{S_0}\right) = e^{rt} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_t(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_t(K)}{K^2} dK \right), \\ E\left(-\ln S_t + \ln K_0 + \frac{S_t - K_0}{K_0}\right) = e^{rt} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_t(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_t(K)}{K^2} dK \right), \end{cases}$$

则取 t 为时间段 $[0, T]$ 的终止时间 T ，

$$\begin{aligned} & e^{rT} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \\ &= E \left[\ln \frac{S_0}{K_0} + S_T \left(\frac{1}{S_0} - \frac{1}{K_0} \right) \right] + e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \\ &= \ln \frac{S_0}{K_0} + e^{rT} - \frac{F}{K_0} + e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right), \end{aligned} \quad (9)$$

结合上述 (7) 和 (8)，我们可以得到

$$\begin{aligned} VIX &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[rT - (e^{rT} - 1) + e^{rT} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[rT - (e^{rT} - 1) + \ln \frac{S_0}{K_0} + e^{rT} - \frac{F}{K_0} + e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]} \\ &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[\left(rT + \ln \frac{S_0}{K_0} \right) + 1 - \frac{F}{K_0} + e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{\frac{2}{T} \left[\ln \frac{F}{K_0} + 1 - \frac{F}{K_0} + e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]} \\
 &\approx \sqrt{\frac{2}{T} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{F}{K_0} - 1 \right)^2 + e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_T(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_T(K)}{K^2} dK \right) \right]}, \tag{10}
 \end{aligned}$$

其中上述倒数第 2 个等号用到的事实是远期 F 在时间 T 的价格为 $S_T = S_0 e^{rT}$ 。

将上面的表达式离散化，我们可以得到

$$VIX = \sqrt{-\frac{1}{T} \left[\frac{F}{K_0} - 1 \right]^2 + \frac{2}{T} \sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{rT} Q(K_i)}.$$

(二) GVIX 的具体推导以及与 VIX 的联系

这里我们给出 GVIX 的数学推导，便于感兴趣的读者查阅。

符号说明：令 $C_T(K)$ 和 $P_T(K)$ 分别表示欧式看涨和看跌期权，其中的 K 是行权价、 T 是到期日； S_0 是无套利情形下的当前资产价格，由“买卖权平价关系”而定，即 $S_0 = C_T(K) - P_T(K) + Ke^{rT}$ ；远期价格定义为 $F_0 = E(S_T) = S_0 e^{rT}$ ； K_0 为第一个低于远期价格 F_0 的执行价格，即 $K_0 = \inf\{y > 0, y \leq F_0\}$ 。

假设有限一阶矩 μ_T 和有限二阶矩 ν_T 存在，不对收益的分布或所遵循的随机过程做任何具体化，则

$$GVIX = \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{\nu_T - 2\zeta_T^2} \tag{11}$$

其中， $\zeta_T = \ln \frac{K_0}{S_0} + \frac{F_0}{K_0} - 1 - e^{rT} \left[\int_{K_0}^{\infty} \frac{1}{K^2} C_T(K) dK + \int_0^{K_0} \frac{1}{K^2} P_T(K) dK \right]$ (*)，

$$\begin{aligned}
 \nu_T &= \left(\ln \frac{K_0}{S_0} \right)^2 + 2 \left(\ln \frac{K_0}{S_0} \right) \left(\frac{F_0}{K_0} - 1 \right) \\
 &\quad + 2e^{rT} \left[\int_{K_0}^{\infty} \frac{1 - \ln \frac{K}{S_0}}{K^2} C_T(K) dK + \int_0^{K_0} \frac{1 - \ln \frac{K}{S_0}}{K^2} P_T(K) dK \right] (**).
 \end{aligned}$$

事实上，有限一阶矩 μ_T 的表达式可由上述 (6) 和 (9) 推导得出，下面我们给出具体过程：

$$\zeta_T \triangleq E(r_T) =_{(5)} E(R_T) - e^{rT} \left(\int_{S_0}^{\infty} \frac{C_t(K)}{K^2} dK + \int_0^{S_0} \frac{P_t(K)}{K^2} dK \right)$$

$$\begin{aligned}
 &=_{(9)} E(R_T) - E \left[\ln \frac{S_0}{K_0} + S_T \left(\frac{1}{S_0} - \frac{1}{K_0} \right) \right] - e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_t(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_t(K)}{K^2} dK \right) \\
 &=_{(R_T \text{ 的定义})} - E \left[1 + \ln \frac{S_0}{K_0} + \frac{S_T}{S_0} \right] - e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_t(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_t(K)}{K^2} dK \right) \\
 &=_{(远期 F_0 \text{ 的定义})} - 1 + \ln \frac{K_0}{S_0} - \frac{F_0}{K_0} - e^{rT} \left(\int_{K_0}^{\infty} \frac{C_t(K)}{K^2} dK + \int_0^{K_0} \frac{P_t(K)}{K^2} dK \right);
 \end{aligned}$$

接下来是关于有限二阶矩 v_T 的推导：先给出它的定义式

$$v_T \triangleq E(r_T^2) = E \left[\left(\ln \frac{S_T}{S_0} \right)^2 \right].$$

令 $f(x) \triangleq \left(\ln \frac{x}{S_0} \right)^2$ ，则一阶导 $f'(x) = \frac{2}{x} \ln \frac{x}{S_0}$ 和二阶导 $f''(x) = \frac{2}{x^2} \left(1 - \frac{x}{S_0} \right)$ ；此外，类似于上述（4）式的解释，我们这里可以有

$$\begin{aligned}
 f(S_T) &= f(K_0) + f'(K_0)(S_T - K_0) + \int_{K_0}^{\infty} f''(K)(S_T - K)^+ dK \\
 &\quad + \int_0^{K_0} f''(K)(K - S_T)^+ dK,
 \end{aligned}$$

因此代入可得，

$$\begin{aligned}
 \left(\ln \frac{S_T}{S_0} \right)^2 &= \left(\ln \frac{K_0}{S_0} \right)^2 + 2 \left(\ln \frac{K_0}{S_0} \right) \left(\frac{F_0}{K_0} - 1 \right) \\
 &\quad + 2e^{rT} \left[\int_{K_0}^{\infty} \frac{1 - \ln \frac{K}{S_0}}{K^2} C_T(K) dK + \int_0^{K_0} \frac{1 - \ln \frac{K}{S_0}}{K^2} P_T(K) dK \right],
 \end{aligned}$$

两边取期望并注意到远期价格 F_0 的定义，即可得到 (**).

注：下面来探究 GVIX 与 VIX 的关系，事实上：

$$\begin{aligned}
 d \left(\ln \frac{S_t}{S_0} \right) &= d(\ln S_t) =_{h(x) \triangleq \ln(x)} h'(S_t) dS_t + \frac{1}{2} h''(S_t) d\langle S \rangle_t \\
 &= \frac{1}{S_t} dS_t + \frac{1-1}{2 S_t^2} \sigma_t^2 S_t^2 dt =_{(S_t \text{ 定义})} \left(\mu - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dW_t,
 \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
 d \left(\ln \frac{S_t}{S_0} \right)^2 &=_{g(x) \triangleq x^2} g' \left(\ln \frac{S_t}{S_0} \right) d \left(\ln \frac{S_t}{S_0} \right) + \frac{1}{2} g'' \left(\ln \frac{S_t}{S_0} \right) d \langle \ln \frac{S_t}{S_0} \rangle_t \\
 &=_{(12)} 2 \ln \frac{S_t}{S_0} \left[\left(\mu - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + \sigma_t dW_t \right] + \frac{1}{2} 2 \sigma_t^2 dt.
 \end{aligned}$$

对上式的积分形式取期望，我们可以有

$$v_T = E \left[\left(\ln \frac{S_T}{S_0} \right)^2 \right] = E \left[\int_0^T d \left(\ln \frac{S_t}{S_0} \right)^2 \right] = E \left[\int_0^T 2 \ln \frac{S_t}{S_0} \left(\mu - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt \right] + E \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right]$$

$$\begin{aligned}
 &=_{\text{(第一项使用Fubini)}} 2 \int_0^T E \left[\ln \frac{S_t}{S_0} \right] \left(\mu - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt + E \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right] \\
 &=_{(12)} 2 \left\{ \int_0^T \left(\mu - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt \right\}^2 + E \left[\int_0^T \sigma_t^2 dt \right],
 \end{aligned}$$

注意到上式中右边第一项为 $2\zeta_T^2$ ，第二项为 $T \cdot \text{VIX}^2$ ，即

$$\text{GVIX} \triangleq \frac{1}{\sqrt{T}} \sqrt{v_T - 2\zeta_T^2} =_{\text{(上方的推导)}} \text{VIX},$$

其中上面推导中的紫色标注部分表明若我们对收益的分布具体化为“服从几何布朗运动”，那么这种情况下 GVIX 就是 VIX。

免责声明

除非另有说明，中信期货有限公司拥有本报告的版权和/或其他相关知识产权。未经中信期货有限公司事先书面许可，任何单位或个人不得以任何方式复制、转载、引用、刊登、发表、发行、修改、翻译此报告的全部或部分材料、内容。除非另有说明，本报告中使用的所有商标、服务标记及标记均为中信期货有限公司所有或经合法授权被许可使用的商标、服务标记及标记。未经中信期货有限公司或商标所有权人的书面许可，任何单位或个人不得使用该商标、服务标记及标记。

如果在任何国家或地区管辖范围内，本报告内容或其适用与任何政府机构、监管机构、自律组织或者清算机构的法律、规则或规定内容相抵触，或者中信期货有限公司未被授权在当地提供这种信息或服务，那么本报告的内容并不意图提供给这些地区的个人或组织，任何个人或组织也不得在当地查看或使用本报告。本报告所载的内容并非适用于所有国家或地区或者适用于所有人。

此报告所载的全部内容仅作参考之用。此报告的内容不构成对任何人的投资建议，且中信期货有限公司不会因接收人收到此报告而视其为客户。

尽管本报告中所包含的信息是我们于发布之时从我们认为可靠的渠道获得，但中信期货有限公司对于本报告所载的信息、观点以及数据的准确性、可靠性、时效性以及完整性不作任何明确或隐含的保证。因此任何人不得对本报告所载的信息、观点以及数据的准确性、可靠性、时效性及完整性产生任何依赖，且中信期货有限公司不对因使用此报告及所载材料而造成的损失承担任何责任。本报告不应取代个人的独立判断。本报告仅反映编写人的不同设想、见解及分析方法。本报告所载的观点并不代表中信期货有限公司或任何其附属或联营公司的立场。

此报告中所指的投资及服务可能不适合阁下。我们建议阁下如有任何疑问应咨询独立投资顾问。此报告不构成任何投资、法律、会计或税务建议，且不担保任何投资及策略适合阁下。此报告并不构成中信期货有限公司给予阁下的任何私人咨询建议。

深圳总部

地址：深圳市福田区中心三路8号卓越时代广场（二期）北座13层1301-1305、14层

邮编：518048

电话：400-990-8826

传真：(0755) 83241191

网址：<http://www.citicsf.com>